Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

Москва 2025

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

9 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Окружность, первоначально касающаяся середины стороны правильного выпуклого 18 – угольника, катится по нему снаружи без проскальзывания и заканчивает движение в той же точке. Длина окружности равна 1, длина стороны 18 – угольника равна 1. Сколько оборотов вокруг своего центра совершила окружность?
2. Известная последовательность чисел Фибоначчи задаётся следующим образом: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n = 2,3,4, \ldots$, причём $F_0 = 0, F_1 = 1$. Про последовательность (a_n) известно следующее: $a_n = 5a_{n-1} + F_n - 1$, $r_5(a_{999}) = 0$, $r_5(a_{997}) = 1$. Найдите $r_5(a_{1000})$. Здесь под $r_m(n)$ понимается остаток от деления целого числа n на целое число m.
3. У Бориса было 15 различных кубиков. Для каждого кубика Борис изготовил из дерева по одному стержню, длина которого совпадала с длиной ребра соответствующего кубика. Сумма длин всех стержней оказалась равна 87. Затем Борис из этих 15 стержней составил всевозможные пары (пары, например, для 1-го и 2-го кубиков – это одна пара) и для каждой пары вычислил площадь прямоугольника со сторонами, равными их длинам. Суммарная площадь всех прямоугольников получилась 3414. Затем Борис составил всевозможные тройки стержней (как и выше, набор $\{1,2,3\}$ – это одна тройка) и вычислил объём прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными их длинам. Суммарный объём параллелепипедов оказался равен 79940. Найдите суммарный объём 15 кубиков.
4. Пусть дана последовательность (a_n):
$$a_n = \sin\frac{n\pi}{2025} - 2\sin\frac{(n+1)\pi}{2025} - 3\sin\frac{(n+2)\pi}{2025} + 4\sin\frac{(n+3)\pi}{2025}, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$
Найдите какие-нибудь целые числа a и b, такие, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_{4047} = a \cdot \sin\frac{\pi}{b}$. Ответ обоснуйте.
5. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник. AD=19, BC=17, AB=CD и MN=18, где M и N середины сторон AB и CD соответственно, диагонали AC и BD перпендикулярны. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.
6. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; будем считать, что $f(0) = 1$. Докажите, что для всех $x \in [-1,1]$ справедливо неравенство $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
7. Среди дробей вида $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $n < 15$, найдите ту, которая на числовой оси расположена ближе всего к дроби $\frac{14}{23}$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Число оборотов равно сумме числа оборотов, набранных при движении по сторонам 18 – угольника и числа оборотов, набранных при переваливании через вершины. При переваливании через вершину с внутренним углом α окружность поворачивается на угол $\pi - \alpha$. Тогда в сумме при переваливании через все n вершин получится поворот на угол $\sum_{i=1}^{18}(\pi - \alpha) = 2\pi$.

То есть, на один полный оборот.

ОТВЕТ: 19.

Задача 2

Так как $a_n = 5a_{n-1} + F_n - 1$, то $F_n = a_n - 5a_{n-1} + 1$. Пользуясь тем, что $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, получаем выражение $a_n - 5a_{n-1} + 1 = a_{n-1} - 5a_{n-2} + 1 + a_{n-2} - 5a_{n-3} + 1$. Упростив его получим $a_n - 6a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3} = 1$. Причем последнее равенство верно для всех n, а значит верно и при $n-1$, то есть $a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} + 5a_{n-4} = 1$. Приравняв последние два равенства получим: $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} + a_{n-3} - 5a_{n-4} = 0$ или $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} - a_{n-3} + 5a_{n-4}$. Поделив с остатком на 5 левую и правую часть при $n = 1000$ получим, что $r_5(a_{1000}) = r_5(7 * 0 - 1) = 4$.

ОТВЕТ: 4.

Задача 3

Обозначим $x_1, \dots, x_{15}$ – длины ребер кубиков, $S_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_{15} = 87$, $S_2 = x_1x_2 + \dots + x_{14}x_{15} = 3414$, $S_3 = x_1x_2x_3 + \dots + x_{13}x_{14}x_{15} = 79940$.

Тогда $x_1^3 + \dots + x_{25}^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 = 7269$.

ОТВЕТ: 7269.

Задача 4

Рассмотрим первые 4 члена последовательности.

$a_1 = \sin\frac{\pi}{2025} - 2\sin\frac{2\pi}{2025} - 3\sin\frac{3\pi}{2025} + 4\sin\frac{4\pi}{2025}$.

$a_2 = \sin\frac{2\pi}{2025} - 2\sin\frac{3\pi}{2025} - 3\sin\frac{4\pi}{2025} + 4\sin\frac{5\pi}{2025}$.

$a_3 = \sin\frac{3\pi}{2025} - 2\sin\frac{4\pi}{2025} - 3\sin\frac{5\pi}{2025} + 4\sin\frac{6\pi}{2025}$.

$a_4 = \sin\frac{4\pi}{2025} - 2\sin\frac{5\pi}{2025} - 3\sin\frac{6\pi}{2025} + 4\sin\frac{7\pi}{2025}$.

Тогда просуммировав их, получим, что коэффициент при $\sin\frac{4\pi}{2025}$ равен $4 - 3 - 2 + 1 = 0$. Аналогично (добавив a_5) исчезнет и $\sin\frac{5\pi}{2025}$ и т.д. Таким образом из искомой суммы исчезнут $\sin\frac{k\pi}{2025}$, где $k = 4,5, \dots, 4047$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{4047} a_n = \left(\sin\frac{\pi}{2025} - 2\sin\frac{2\pi}{2025} - 3\sin\frac{3\pi}{2025}\right) + \left(\sin\frac{2\pi}{2025} - 2\sin\frac{3\pi}{2025}\right) + \left(\sin\frac{3\pi}{2025}\right) + \left(4\sin\frac{4048\pi}{2025}\right) + \left(-3\sin\frac{4048\pi}{2025} + 4\sin\frac{4049\pi}{2025}\right) + \left(-2\sin\frac{4048\pi}{2025} - 3\sin\frac{4049\pi}{2025} + 4\sin\frac{4050\pi}{2025}\right),$$

последние 3 скобки получились из a_n при $n = 4045{,}4046{,}4047$.

$\sum_{n=1}^{4047} a_n = \sin\frac{\pi}{2025} - \sin\frac{2\pi}{2025} - 4\sin\frac{3\pi}{2025} - \sin\frac{4048\pi}{2025} + \sin\frac{4049\pi}{2025} + 4\sin\frac{4050\pi}{2025}$.

Остается заметить, что $\sin\frac{4050\pi}{2025} = \sin 2\pi = 0$,

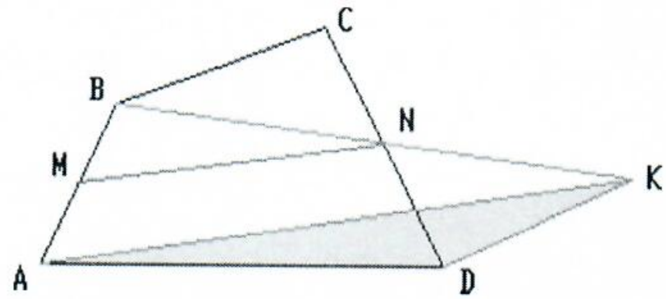
$\sin\frac{\pi}{2025} + \sin\frac{4049\pi}{2025} = 2\sin\frac{4050\pi}{4050}\cos\frac{4048\pi}{4050} = 0$,

$\sin\frac{2\pi}{2025} + \sin\frac{4048\pi}{2025} = 2\sin\frac{4050\pi}{4050}\cos\frac{4046\pi}{4050} = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2025} = \sin\frac{\pi}{675}$.

ОТВЕТ: $-4\sin\frac{\pi}{675}$.

Задача 5

Докажем, что *ABCD* – трапеция. На продолжении отрезка *BN* за точку *N* отложим отрезок *NK*, равный *BN*. Из равенства треугольников *BCN* и *KDN* (по двум сторонам и углу между ними) следует, что *DK* = *BC* и *DK* || *BC*.



Поскольку MN – средняя линия треугольника ABK, то $AK = 2MN = AD + BC = AD + DK$. Следовательно, точка D лежит на отрезке AK и $AD \parallel BC$. Далее, используя условие перпендикулярности диагоналей, получаем $S = 324$.

ОТВЕТ: 324.

Задача 6

Очевидно, что достаточно доказать для $x \in [0,1]$.

1-ый способ. Воспользоваться неравенством $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ и доказать $\frac{x-\frac{x^3}{6}}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2-ой способ. Замена $x = tg\, t$. После очевидных преобразований придём задаче: доказать $tg\, t \geq t$ для всех $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Последнее неравенство легко доказывается с использованием производной.

Задача 7

Представим $\frac{14}{23}$ в виде цепной дроби:

$$\frac{14}{23} = \frac{1}{23/14} = \frac{1}{1+\frac{9}{14}} = \frac{1}{1+\frac{1}{14/9}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{5}{9}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{4}{5}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\mathbf{\frac{1}{4}}}}}}$$

Заменив выделенную жирным дробь $1/4$ на x, получим функцию

$$R(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}} = \frac{3+2x}{5+3x}.$$

Ясно, что если x «варьируется вблизи» $1/4$, то значение дроби $R(x)$ будет «варьироваться вблизи» $\frac{14}{23}$. Заметим, что функция $R(x)$ при $x > 0$ возрастает и $R(0) = \frac{3}{5} < R(1/4) = \frac{14}{23}$. Поэтому, при $x > 0$ некоторые значения дроби $R(x)$ окажутся ближе к дроби $\frac{14}{23}$, нежели $\frac{3}{5}$, однако пока непонятно будет ли при этом знаменатель дроби $R(x)$ (для $x \in \mathbb{Q}$) удовлетворять ограничениям задачи. Изучим этот вопрос, положив $x = a/b$, где $a \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{N}$. Считаем дробь a/b несократимой. Тогда

$$R(a/b) = \frac{3b+2a}{5b+3a}. \tag{1}$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ и $(a,b) = 1$. Тогда дробь (1) несократима.

Доказательство. Предположим противное: существует простое число d такое, что числитель и знаменатель дроби (1) на него делятся. Тогда на d будет делиться и выражение $5 \cdot (3b+2a) - 3 \cdot (5b+3a) = a$. Следовательно, d – делитель a, но не делитель b (в силу взаимной простоты

a и b). Чтобы на d поделился числитель дроби (1), необходимо, чтоб на d делилось число $3b$, то есть d должно равняться 3. Но слагаемое $5b$ в знаменателе не делится на 3, а значит дробь (1) несократима. Получено противоречие. Утверждение доказано. ■

Доказав, что (1) несократима, мы можем утверждать, что знаменатель дроби (1) не превзойдёт 14 лишь в случаях: 1) $a = 0$, $b \in \mathbb{N}$, и тогда $R(a/b) = R(0) = \frac{3}{5}$, 2) $a = 1, b = 1$, и тогда $R(a/b) = R(1) = \frac{5}{8}$, 3) $a = 1, b = 2$, $R(1/2) = \frac{8}{13}$, 4) $a = 2, b = 1$, $R(2) = \frac{7}{11}$, 5) $a = 3, b = 1$, $R(3) = \frac{9}{14}$. Среди найденных вариантов ближайшей к дроби $\frac{14}{23}$ будет дробь $\frac{8}{13} > \frac{14}{23}$.

ОТВЕТ: $\frac{8}{13}$.

10 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Окружность, первоначально касающаяся середины стороны правильного выпуклого 18 – угольника, катится по нему снаружи без проскальзывания и заканчивает движение в той же точке. Длина окружности равна 1, длина стороны 18 – угольника равна 1. Сколько оборотов вокруг своего центра совершила окружность?
2. Известная последовательность чисел Фибоначчи задаётся следующим образом: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n = 2,3,4, \ldots$, причём $F_0 = 0, F_1 = 1$. Про последовательность (a_n) известно следующее: $a_n = 5a_{n-1} + F_n - 1$, $r_5(a_{999}) = 0$, $r_5(a_{997}) = 1$. Найдите $r_5(a_{1000})$. Здесь под $r_m(n)$ понимается остаток от деления целого числа n на целое число m.
3. У Бориса было 15 различных кубиков. Для каждого кубика Борис изготовил из дерева по одному стержню, длина которого совпадала с длиной ребра соответствующего кубика. Сумма длин всех стержней оказалась равна 87. Затем Борис из этих 15 стержней составил всевозможные пары (пары, например, для 1-го и 2-го кубиков – это одна пара) и для каждой пары вычислил площадь прямоугольника со сторонами, равными их длинам. Суммарная площадь всех прямоугольников получилась 3414. Затем Борис составил всевозможные тройки стержней (как и выше, набор $\{1,2,3\}$ – это одна тройка) и вычислил объём прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными их длинам. Суммарный объём параллелепипедов оказался равен 79940. Найдите суммарный объём 15 кубиков.
4. Пусть дана последовательность (a_n):
$$a_n = \sin\frac{n\pi}{2025} - 2\sin\frac{(n+1)\pi}{2025} - 3\sin\frac{(n+2)\pi}{2025} + 4\sin\frac{(n+3)\pi}{2025}, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$
Найдите какие-нибудь целые числа a и b, такие, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_{4047} = a \cdot \sin\frac{\pi}{b}$. Ответ обоснуйте.
5. Пусть $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник. AD=19, BC=17, AB=CD и MN=18, где M и N середины сторон AB и CD соответственно, диагонали AC и BD перпендикулярны. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.
6. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; будем считать, что $f(0) = 1$. Докажите, что для всех $x \in [-1,1]$ справедливо неравенство $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
7. Среди дробей вида $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $n < 15$, найдите ту, которая на числовой оси расположена ближе всего к дроби $\frac{14}{23}$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Число оборотов равно сумме числа оборотов, набранных при движении по сторонам 18 – угольника и числа оборотов, набранных при переваливании через вершины. При переваливании через вершину с внутренним углом α окружность поворачивается на угол $\pi - \alpha$. Тогда в сумме при переваливании через все n вершин получится поворот на угол $\sum_{i=1}^{18}(\pi - \alpha) = 2\pi$.

То есть, на один полный оборот.

ОТВЕТ: 19.

Задача 2

Так как $a_n = 5a_{n-1} + F_n - 1$, то $F_n = a_n - 5a_{n-1} + 1$. Пользуясь тем, что $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, получаем выражение $a_n - 5a_{n-1} + 1 = a_{n-1} - 5a_{n-2} + 1 + a_{n-2} - 5a_{n-3} + 1$. Упростив его получим $a_n - 6a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3} = 1$. Причем последнее равенство верно для всех n, а значит верно и при $n - 1$, то есть $a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} + 5a_{n-4} = 1$. Приравняв последние два равенства получим: $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} + a_{n-3} - 5a_{n-4} = 0$ или $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} - a_{n-3} + 5a_{n-4}$. Поделив с остатком на 5 левую и правую часть при $n = 1000$ получим, что $r_5(a_{1000}) = r_5(7 * 0 - 1) = 4$.

ОТВЕТ: 4.

Задача 3

Обозначим $x_1, \dots, x_{15}$ – длины ребер кубиков, $S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_{15} = 87$, $S_2 = x_1x_2 + \cdots + x_{14}x_{15} = 3414$, $S_3 = x_1x_2x_3 + \cdots + x_{13}x_{14}x_{15} = 79940$.

Тогда $x_1^3 + \cdots + x_{25}^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 = 7269$.

ОТВЕТ: 7269.

Задача 4

Рассмотрим первые 4 члена последовательности.

$a_1 = \sin\frac{\pi}{2025} - 2\sin\frac{2\pi}{2025} - 3\sin\frac{3\pi}{2025} + 4\sin\frac{4\pi}{2025}$.

$a_2 = \sin\frac{2\pi}{2025} - 2\sin\frac{3\pi}{2025} - 3\sin\frac{4\pi}{2025} + 4\sin\frac{5\pi}{2025}$.

$a_3 = \sin\frac{3\pi}{2025} - 2\sin\frac{4\pi}{2025} - 3\sin\frac{5\pi}{2025} + 4\sin\frac{6\pi}{2025}$.

$a_4 = \sin\frac{4\pi}{2025} - 2\sin\frac{5\pi}{2025} - 3\sin\frac{6\pi}{2025} + 4\sin\frac{7\pi}{2025}$.

Тогда просуммировав их, получим, что коэффициент при $\sin\frac{4\pi}{2025}$ равен $4 - 3 - 2 + 1 = 0$.

Аналогично (добавив a_5) исчезнет и $\sin\frac{5\pi}{2025}$ и т.д. Таким образом из искомой суммы исчезнут $\sin\frac{k\pi}{2025}$, где $k = 4,5, \dots, 4047$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{4047} a_n = \left(\sin\frac{\pi}{2025} - 2\sin\frac{2\pi}{2025} - 3\sin\frac{3\pi}{2025}\right) + \left(\sin\frac{2\pi}{2025} - 2\sin\frac{3\pi}{2025}\right) + \left(\sin\frac{3\pi}{2025}\right) + \left(4\sin\frac{4048\pi}{2025}\right) + \left(-3\sin\frac{4048\pi}{2025} + 4\sin\frac{4049\pi}{2025}\right) + \left(-2\sin\frac{4048\pi}{2025} - 3\sin\frac{4049\pi}{2025} + 4\sin\frac{4050\pi}{2025}\right),$$

последние 3 скобки получились из a_n при $n = 4045,4046,4047$.

$\sum_{n=1}^{4047} a_n = \sin\frac{\pi}{2025} - \sin\frac{2\pi}{2025} - 4\sin\frac{3\pi}{2025} - \sin\frac{4048\pi}{2025} + \sin\frac{4049\pi}{2025} + 4\sin\frac{4050\pi}{2025}$.

Остается заметить, что $\sin\frac{4050\pi}{2025} = \sin 2\pi = 0$,

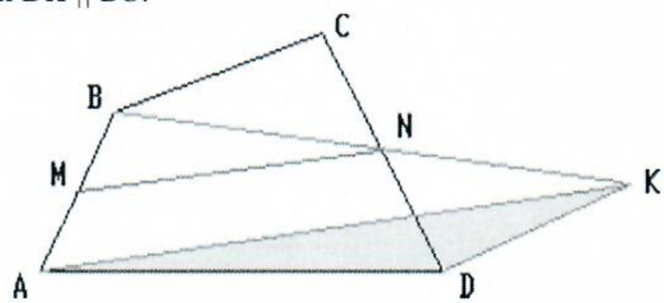
$\sin\frac{\pi}{2025} + \sin\frac{4049\pi}{2025} = 2\sin\frac{4050\pi}{4050}\cos\frac{4048\pi}{4050} = 0$,

$\sin\frac{2\pi}{2025} + \sin\frac{4048\pi}{2025} = 2\sin\frac{4050\pi}{4050}\cos\frac{4046\pi}{4050} = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2025} = \sin\frac{\pi}{675}$.

ОТВЕТ: $-4\sin\frac{\pi}{675}$.

Задача 5

Докажем, что *ABCD* – трапеция. На продолжении отрезка *BN* за точку *N* отложим отрезок *NK*, равный *BN*. Из равенства треугольников *BCN* и *KDN* (по двум сторонам и углу между ними) следует, что *DK* = *BC* и *DK* || *BC*.



Поскольку *MN* – средняя линия треугольника *ABK*, то *AK* = 2*MN* = *AD* + *BC* = *AD* + *DK*. Следовательно, точка *D* лежит на отрезке *AK* и *AD* || *BC*. Далее, используя условие перпендикулярности диагоналей, получаем $S = 324$.

ОТВЕТ: 324.

Задача 6

Очевидно, что достаточно доказать для $x \in [0,1]$.

1-ый способ. Воспользоваться неравенством $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ и доказать $\frac{x - \frac{x^3}{6}}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2-ой способ. Замена $x = tg\, t$. После очевидных преобразований придём задаче: доказать $tg\, t \geq t$ для всех $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Последнее неравенство легко доказывается с использованием производной.

Задача 7

Представим $\frac{14}{23}$ в виде цепной дроби:

$$\frac{14}{23} = \frac{1}{23/14} = \frac{1}{1+\frac{9}{14}} = \frac{1}{1+\frac{1}{14/9}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{5}{9}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{4}{5}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\boldsymbol{\frac{1}{4}}}}}}$$

Заменив выделенную жирным дробь $1/4$ на x, получим функцию

$$R(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}} = \frac{3+2x}{5+3x}.$$

Ясно, что если x «варьируется вблизи» $1/4$, то значение дроби $R(x)$ будет «варьироваться вблизи» $\frac{14}{23}$. Заметим, что функция $R(x)$ при $x > 0$ возрастает и $R(0) = \frac{3}{5} < R(1/4) = \frac{14}{23}$. Поэтому, при $x > 0$ некоторые значения дроби $R(x)$ окажутся ближе к дроби $\frac{14}{23}$, нежели $\frac{3}{5}$, однако пока непонятно будет ли при этом знаменатель дроби $R(x)$ (для $x \in \mathbb{Q}$) удовлетворять ограничениям задачи. Изучим этот вопрос, положив $x = {}^{a}/_{b}$, где $a \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{N}$. Считаем дробь ${}^{a}/_{b}$ несократимой. Тогда

$$R(a/b) = \frac{3b + 2a}{5b + 3a}. \qquad (1)$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ и $(a, b) = 1$. Тогда дробь (1) несократима.

Доказательство. Предположим противное: существует простое число d такое, что числитель и знаменатель дроби (1) на него делятся. Тогда на d будет делиться и выражение $5 \cdot (3b + 2a) - 3 \cdot (5b + 3a) = a$. Следовательно, d – делитель a, но не делитель b (в силу взаимной простоты a и b). Чтобы на d поделился числитель дроби (1), необходимо, чтоб на d делилось число $3b$, то есть d должно равняться 3. Но слагаемое $5b$ в знаменателе не делится на 3, а значит дробь (1) несократима. Получено противоречие. Утверждение доказано. ■

Доказав, что (1) несократима, мы можем утверждать, что знаменатель дроби (1) не превзойдёт 14 лишь в случаях: 1) $a = 0,\ b \in \mathbb{N}$, и тогда $R(a/b) = R(0) = \frac{3}{5}$, 2) $a = 1, b = 1$, и тогда $R(a/b) = R(1) = \frac{5}{8}$, 3) $a = 1, b = 2$, $R(1/2) = \frac{8}{13}$, 4) $a = 2, b = 1$, $R(2) = \frac{7}{11}$, 5) $a = 3, b = 1$, $R(3) = \frac{9}{14}$. Среди найденных вариантов ближайшей к дроби $\frac{14}{23}$ будет дробь $\frac{8}{13} > \frac{14}{23}$.

ОТВЕТ: $\frac{8}{13}$.

11 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Окружность, первоначально касающаяся середины стороны правильного выпуклого 18 – угольника, катится по нему снаружи без проскальзывания и заканчивает движение в той же точке. Длина окружности равна 1, длина стороны 18 – угольника равна 2. Сколько оборотов вокруг своего центра совершила окружность?
2. Известная последовательность чисел Фибоначчи задаётся следующим образом: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n = 2,3,4, \ldots$, причём $F_0 = 0, F_1 = 1$. Про последовательность (a_n) известно следующее: $a_n = 5a_{n-1} + F_n - 1$, $r_5(a_{999}) = 0$, $r_5(a_{997}) = 1$. Найдите $r_5(a_{1000})$. Здесь под $r_m(n)$ понимается остаток от деления целого числа n на целое число m.
3. У Бориса было 25 различных кубиков. Для каждого кубика Борис изготовил из дерева по одному стержню, длина которого совпадала с длиной ребра соответствующего кубика. Сумма длин всех стержней оказалась равна 180. Затем Борис из этих 25 стержней составил всевозможные пары (пары, например, для 1-го и 2-го кубиков – это одна пара). Для каждой пары вычислил площадь прямоугольника со сторонами, равными их длинам. Суммарная площадь всех прямоугольников получилась 15540. Затем Борис составил всевозможные тройки стержней (как и выше, набор (1,2,3) – это одна тройка) и вычислил объём прямоугольного параллелепипеда со сторонами, равными их длинам. Суммарный объём параллелепипедов оказался равен 856520. Найдите суммарный объём 25 кубиков.
4. Пусть дана последовательность (a_n):
$$a_n = \sin\frac{n\pi}{2025} - 2\sin\frac{(n+1)\pi}{2025} - 3\sin\frac{(n+2)\pi}{2025} + 4\sin\frac{(n+3)\pi}{2025}, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$
Найдите какие-нибудь целые числа a и b, такие, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_{4047} = a \cdot \sin\frac{\pi}{b}$. Ответ обоснуйте.

5. Найдите первые две цифры в десятичной записи числа 2^{100}. (Например, первые две цифры числа 2^9 – это 5 и 1.)

Указание. Вам может понадобиться таблица приближенных значений десятичных логарифмов

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\lg n$	0	0,30103	0,47712	0,60206	0,69897	0,77815	0,84510	0,90309	0,95424	1	1,04139	1,07918	1,11394	1,14613	1,17609

6. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; будем считать, что $f(0) = 1$. Докажите, что для всех $x \in [-1,1]$ справедливо неравенство $f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

7. Среди дробей вида $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и $n < 15$, найдите ту, которая на числовой оси расположена ближе всего к дроби $\frac{14}{23}$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Число оборотов равно сумме числа оборотов, набранных при движении по сторонам 18 – угольника и числа оборотов, набранных при переваливании через вершины. При переваливании через вершину с внутренним углом α окружность поворачивается на угол $\pi - \alpha$. Тогда в сумме при переваливании через все n вершин получится поворот на угол $\sum_{i=1}^{18}(\pi - \alpha) = 2\pi$.

То есть, на один полный оборот.

ОТВЕТ: 37.

Задача 2

Так как $a_n = 5a_{n-1} + F_n - 1$, то $F_n = a_n - 5a_{n-1} + 1$. Пользуясь тем, что $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, получаем выражение $a_n - 5a_{n-1} + 1 = a_{n-1} - 5a_{n-2} + 1 + a_{n-2} - 5a_{n-3} + 1$. Упростив его получим $a_n - 6a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3} = 1$. Причем последнее равенство верно для всех n, а значит верно и при $n - 1$, то есть $a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} + 5a_{n-4} = 1$. Приравняв последние два равенства получим: $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} + a_{n-3} - 5a_{n-4} = 0$ или $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} - a_{n-3} + 5a_{n-4}$. Поделив с остатком на 5 левую и правую часть при $n = 1000$ получим, что $r_5(a_{1000}) = r_5(7 * 0 - 1) = 4$.

ОТВЕТ: 4.

Задача 3

Обозначим $x_1, \dots, x_{25}$ – длины ребер кубиков, $S_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_{25} = 180$, $S_2 = x_1x_2 + \dots + x_{24}x_{25} = 15540$, $S_3 = x_1x_2x_3 + \dots + x_{23}x_{24}x_{25} = 856520$.

Тогда $x_1^3 + \dots + x_{25}^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 = 9960$.

ОТВЕТ: 9960.

Задача 4

Рассмотрим первые 4 члена последовательности.

$a_1 = \sin\frac{\pi}{2025} - 2\sin\frac{2\pi}{2025} - 3\sin\frac{3\pi}{2025} + 4\sin\frac{4\pi}{2025}$.

$a_2 = \sin\frac{2\pi}{2025} - 2\sin\frac{3\pi}{2025} - 3\sin\frac{4\pi}{2025} + 4\sin\frac{5\pi}{2025}$.

$a_3 = \sin\frac{3\pi}{2025} - 2\sin\frac{4\pi}{2025} - 3\sin\frac{5\pi}{2025} + 4\sin\frac{6\pi}{2025}$.

$a_4 = \sin\frac{4\pi}{2025} - 2\sin\frac{5\pi}{2025} - 3\sin\frac{6\pi}{2025} + 4\sin\frac{7\pi}{2025}$.

Тогда просуммировав их, получим, что коэффициент при $\sin\frac{4\pi}{2025}$ равен $4-3-2+1=0$. Аналогично (добавив a_5) исчезнет и $\sin\frac{5\pi}{2025}$ и т.д. Таким образом из искомой суммы исчезнут $\sin\frac{k\pi}{2025}$, где $k = 4,5,\dots,4047$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{4047} a_n = \left(\sin\frac{\pi}{2025} - 2\sin\frac{2\pi}{2025} - 3\sin\frac{3\pi}{2025}\right) + \left(\sin\frac{2\pi}{2025} - 2\sin\frac{3\pi}{2025}\right) + \left(\sin\frac{3\pi}{2025}\right) + \left(4\sin\frac{4048\pi}{2025}\right) + \left(-3\sin\frac{4048\pi}{2025} + 4\sin\frac{4049\pi}{2025}\right) + \left(-2\sin\frac{4048\pi}{2025} - 3\sin\frac{4049\pi}{2025} + 4\sin\frac{4050\pi}{2025}\right),$$

последние 3 скобки получились из a_n при $n = 4045, 4046, 4047$.

$\sum_{n=1}^{4047} a_n = \sin\frac{\pi}{2025} - \sin\frac{2\pi}{2025} - 4\sin\frac{3\pi}{2025} - \sin\frac{4048\pi}{2025} + \sin\frac{4049\pi}{2025} + 4\sin\frac{4050\pi}{2025}$.

Остается заметить, что $\sin\frac{4050\pi}{2025} = \sin 2\pi = 0$,

$\sin\frac{\pi}{2025} + \sin\frac{4049\pi}{2025} = 2\sin\frac{4050\pi}{4050}\cos\frac{4048\pi}{4050} = 0$,

$\sin\frac{2\pi}{2025} + \sin\frac{4048\pi}{2025} = 2\sin\frac{4050\pi}{4050}\cos\frac{4046\pi}{4050} = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2025} = \sin\frac{\pi}{675}$.

ОТВЕТ: $-4\sin\frac{\pi}{675}$.

Задача 5

Обозначим $x = 2^{100}$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и при этом $n \le [lgx] < n+1$. Тогда $n = [lgn]$ и $n+1$ – количество цифр в числе x. Первые две цифры числа x – это целая часть числа $\frac{x}{10^{n-1}}$. Тогда $\left[\frac{x}{10^{n-1}}\right] = \left[\frac{x}{10^{[lgn]-1}}\right] = \left[\frac{x}{10^{lgx-\varepsilon-1}}\right] = [10^{1+\varepsilon}]$, где $\varepsilon = \{lgx\}$ – дробная часть числа lgx. Пусть $k = [10^{1+\varepsilon}]$. Тогда $lgk \le 1+\varepsilon$ и $\lg(k+1) > 1+\varepsilon$. У нас $\varepsilon = \{lgx\} = \{100lg2\} \cong \{30{,}11\} = 0{,}11$. По таблице $k = 12$.

ОТВЕТ: 12.

Задача 6

Очевидно, что достаточно доказать для $x \in [0,1]$.

1-ый способ. Воспользоваться неравенством $\sin x \ge x - \frac{x^3}{6}$ и доказать $\frac{x-\frac{x^3}{6}}{x} \ge \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2-ой способ. Замена $x = tg\,t$. После очевидных преобразований придём задаче: доказать $tg\,t \ge t$ для всех $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Последнее неравенство легко доказывается с использованием производной.

Задача 7

Представим $\frac{14}{23}$ в виде цепной дроби:

$$\frac{14}{23} = \frac{1}{23/14} = \frac{1}{1+\frac{9}{14}} = \frac{1}{1+\frac{1}{14/9}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{5}{9}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{4}{5}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\mathbf{\frac{1}{4}}}}}}$$

Заменив выделенную жирным дробь $1/4$ на x, получим функцию

$$R(x) = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + x}}}} = \frac{3 + 2x}{5 + 3x}.$$

Ясно, что если x «варьируется вблизи» $1/_4$, то значение дроби $R(x)$ будет «варьироваться вблизи» $\frac{14}{23}$. Заметим, что функция $R(x)$ при $x > 0$ возрастает и $R(0) = \frac{3}{5} < R(1/4) = \frac{14}{23}$. Поэтому, при $x > 0$ некоторые значения дроби $R(x)$ окажутся ближе к дроби $\frac{14}{23}$, нежели $\frac{3}{5}$, однако пока непонятно будет ли при этом знаменатель дроби $R(x)$ (для $x \in \mathbb{Q}$) удовлетворять ограничениям задачи. Изучим этот вопрос, положив $x = {}^a/_b$, где $a \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{N}$. Считаем дробь ${}^a/_b$ несократимой. Тогда

$$R(a/b) = \frac{3b + 2a}{5b + 3a}. \qquad (1)$$

Нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение. Пусть $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ и $(a, b) = 1$. Тогда дробь (1) несократима.

Доказательство. Предположим противное: существует простое число d такое, что числитель и знаменатель дроби (1) на него делятся. Тогда на d будет делиться и выражение $5 \cdot (3b + 2a) - 3 \cdot (5b + 3a) = a$. Следовательно, d – делитель a, но не делитель b (в силу взаимной простоты a и b). Чтобы на d поделился числитель дроби (1), необходимо, чтоб на d делилось число $3b$, то есть d должно равняться 3. Но слагаемое $5b$ в знаменателе не делится на 3, а значит дробь (1) несократима. Получено противоречие. Утверждение доказано. ■

Доказав, что (1) несократима, мы можем утверждать, что знаменатель дроби (1) не превзойдёт 14 лишь в случаях: 1) $a = 0$, $b \in \mathbb{N}$, и тогда $R(a/b) = R(0) = \frac{3}{5}$, 2) $a = 1, b = 1$, и тогда $R(a/b) = R(1) = \frac{5}{8}$, 3) $a = 1, b = 2$, $R(1/2) = \frac{8}{13}$, 4) $a = 2, b = 1$, $R(2) = \frac{7}{11}$, 5) $a = 3, b = 1$, $R(3) = \frac{9}{14}$. Среди найденных вариантов ближайшей к дроби $\frac{14}{23}$ будет дробь $\frac{8}{13} > \frac{14}{23}$.

ОТВЕТ: $\frac{8}{13}$.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

9 КЛАСС

1. На какое самое большое натуральное число будет гарантированно делиться произведение любых восьми подряд идущих натуральных чисел?
2. В восьмеричной системе счисления запись натурального числа состоит только из единиц. Какие остатки от деления на 9 в десятичной системе счисления может иметь это число? В поле «Ответ» через запятую запишите все возможные остатки в порядке возрастания.
3. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$, с основаниями $BC = 2$ и $AD = 6$, отмечены 13 точек $K1, K2, \ldots, K13$, разбивающие сторону AB на 14 равных отрезков, то есть $AK1 = K1K2 = \cdots = K12K13 = K13B$. Затем через точки $K1, K2, \ldots, K13$ провели прямые, параллельные основаниям трапеции. Эти прямые

пересекли сторону CD соответственно в точках $T1$, $T2$, … , $T13$. Найдите сумму длин получившихся тринадцати отрезков $K1T1$, … ,$K13T13$.

4. Среди всех многочленов вида $x^2 + ax + b$ найти такой, у которого максимум модуля на отрезке [2,10] минимален. В поле «Ответ» запишите сумму $a + b$, округлённую до десятых.
5. На медиане, проведённой из вершины треугольника на основание, взята точка A. Сумма расстояний от A до боковых сторон треугольника равна 3. Найдите расстояния от A до боковых сторон, если длины боковых сторон равны 4 и 2. В поле «Ответ» запишите произведение найденных расстояний, округлённое до десятых.
6. Известно, что система уравнений $\begin{cases} 9x^2 + 6xy + 3y^2 + 25x + 2y = 2 \\ 3x^2 + 6xy - x + y = -1/2 \end{cases}$ имеет ровно 4 решения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$. Найдите сумму $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$. Ответ округлите до десятых.

10 КЛАСС

1. На какое самое большое натуральное число будет гарантированно делиться произведение любых восьми подряд идущих натуральных чисел?
2. В восьмеричной системе счисления запись натурального числа состоит только из единиц. Какие остатки от деления на 9 в десятичной системе счисления может иметь это число? В поле «Ответ» через запятую запишите все возможные остатки в порядке возрастания.
3. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$, с основаниями $BC = 2$ и $AD = 6$, отмечены 13 точек $K1$,$K2$, … ,$K13$, разбивающие сторону AB на 14 равных отрезков, то есть $AK1 = K1K2 = \cdots = K12K13 = K13B$. Затем через точки $K1$,$K2$, … ,$K13$ провели прямые, параллельные основаниям трапеции. Эти прямые пересекли сторону CD соответственно в точках $T1$, $T2$, … , $T13$. Найдите сумму длин получившихся тринадцати отрезков $K1T1$, … ,$K13T13$.
4. Среди всех многочленов вида $x^2 + ax + b$ найти такой, у которого максимум модуля на отрезке [2,10] минимален. В поле «Ответ» запишите сумму $a + b$, округлённую до десятых.
5. На медиане, проведённой из вершины треугольника на основание, взята точка A. Сумма расстояний от A до боковых сторон треугольника равна 3. Найдите расстояния от A до боковых сторон, если длины боковых сторон равны 4 и 2. В поле «Ответ» запишите произведение найденных расстояний, округлённое до десятых.
6. Известно, что система уравнений $\begin{cases} 9x^2 + 6xy + 3y^2 + 25x + 2y = 2 \\ 3x^2 + 6xy - x + y = -1/2 \end{cases}$ имеет ровно 4 решения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$. Найдите сумму $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$. Ответ округлите до десятых.

11 КЛАСС

1. На какое самое большое натуральное число будет гарантированно делиться произведение любых восьми подряд идущих натуральных чисел?
2. В Криптоландии используют семеричную систему счисления и трамвайные билеты имеют 8-значные номера. Билет считается счастливым, если либо сумма его первых четырех цифр равна сумме четырех последних, либо если сумма цифр на четных местах равна сумме цифр на нечетных местах. Если же выполнены оба свойства, то билет считается очень счастливым. Сколько очень счастливых билетов, включая билет 00000000?
3. Сколько существует решений системы уравнений $\begin{cases} \cos x = 2\cos^3 y \\ \sin x = 2\sin^3 y \end{cases}$, при $x \in [0,2\pi]$, $y \in [0,2\pi]$.
4. Среди всех многочленов вида $x^2 + ax + b$ найти такой, у которого максимум модуля на отрезке [2,10] минимален. В поле «Ответ» запишите сумму $a + b$, округлённую до десятых.
5. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке D. Длины отрезков AD и DB равны 3 и 2 соответственно. Величина угла A равна 60°. Найдите величину стороны BC. Ответ округлите до десятых.
6. Известно, что система уравнений $\begin{cases} 9x^2 + 6xy + 3y^2 + 11.5x + 2y = 2 \\ 3x^2 + 6xy - x + y = -1/2 \end{cases}$ имеет ровно 4 решения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$. Найдите сумму $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4$. Ответ округлите до десятых.

ОТВЕТЫ

9 КЛАСС

1) 40320.
2) 0,1.
3) 42.
4) 16.
5) 2.
6) 2.

10 КЛАСС

1) 40320.
2) 0,1.
3) 42.
4) 16.
5) 2.
6) 2.

11 КЛАСС

1) 40320.
2) 53361.

3) 4.
4) 16.
5) 7.
6) 1.